年金と債券の複利利回り

——関数電卓の利用——

野澤 孝之助

まえがき

本稿は，さきの本誌拙稿「電卓による年金現価，利付債券の利回り」[1]（以下，前稿と言う。）の改良，拡張に当るものであるが，独立に読んで頂けるようにするため，前稿と一部重複することを許されたい。

本稿は10桁の関数電卓によって，次の場合の近似値をできるだけ速かに算出する方法を論究することを目的とするものである。

年金現価，償還賦金の利回り　**1，2，3，4**

年金終価，積立賦金の利回り　**5**

利付債券，割引債券の利回り　**6，7**

1

年金現価率 $a_{\overline{n|}}$ は周知のように，

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

である。

いま，$a_{\overline{n|}}$ を a と略記し，その逆数を二項定理により，i について展開する。

$$a^{-1}=\frac{1}{n}\left\{1+\frac{n+1}{2}\cdot i+\frac{n^2-1}{12}\cdot i^2-\frac{n^2-1}{24}\cdot i^3+\cdots\cdots\right\}$$

a^{-1} は，償還賦金率である。

ここで，$\dfrac{n}{a}-1=p$　とおき，i^2 を含む項以下を省略し，i の第１近似値

$$i_1=\frac{2p}{n+1}$$

を求め，次に i^2 を含む項まで採り，i^2 の項の1つにこれを入れて，i の第2近似値を求める。

$$p=\frac{n+1}{2}\cdot i_2+\frac{n^2-1}{12}\cdot\frac{2p}{n+1}\cdot i_2$$

$$\therefore\quad i_2=\frac{6p}{3(n+1)+(n-1)p}$$

ここで，p が n に比較して小さい数であるから，$(n-1)p\fallingdotseq(n+1)p$ を利用して，

$$i_2\fallingdotseq\frac{6p}{(n+1)(3+p)}$$

これを精密な i_1 として，新しく前記同様に i_2 を求める。

$$p=\frac{n+1}{2}\cdot i_2+\frac{n^2-1}{12}\cdot\frac{6p}{(n+1)(3+p)}\cdot i_2$$

$$\therefore\quad i_2=\frac{2p(3+p)}{3(n+1)+2np}\qquad ただし，p=\frac{n}{a}-1\qquad〔1〕^{2)}$$

本式は Karpin の公式であるが，わが国には紹介せられていないようであることは前稿で触れた。

本式は近似度が低いと考えられるので，以下 **2**，**3** に述べる公式の i_1 として利用しようというのが，前稿の趣旨であり本稿もこれに従う。

2

年金現価率において，$i=i_1+\rho$ とおき，逆数を採って変形する。

$$a^{-1}=\frac{i_1+\rho}{1-(1+i_1+\rho)^{-n}}=\frac{i_1\left(1+\dfrac{\rho}{i_1}\right)}{1-(v_1{}^{-1}+\rho)^{-n}}$$

ただし，$v_1=(1+i_1)^{-1}$

$$=\left(1+\frac{\rho}{i_1}\right)\left\{\frac{1-v_1{}^n+nv_1{}^{n+1}\rho-\cdots\cdots}{i_1}\right\}^{-1}$$

$$=\left(1+\frac{\rho}{i_1}\right)\left\{a_1\left(1+\frac{nv_1{}^{n+1}\rho}{a_1i_1}-\cdots\cdots\right)\right\}^{-1}$$

ρ^2 を含む項以下を省略して，

$$a^{-1}=a_1{}^{-1}+\frac{\rho}{i_1}(a_1{}^{-1}-nv_1{}^{n+1}a_1{}^{-2})$$

$$\rho=i_1\cdot\frac{a^{-1}-a_1{}^{-1}}{a_1{}^{-1}-nv_1{}^{n+1}a_1{}^{-2}} \qquad {}^{3)}$$

$$=i_1\cdot\frac{\dfrac{a^{-1}}{a_1{}^{-1}}-1}{1-nv_1{}^{n+1}a_1{}^{-1}}$$

$$\therefore\quad i_2=i_1+i_1\cdot\frac{\dfrac{a^{-1}}{a_1{}^{-1}}-1}{1-nv_1{}^{n+1}a_1{}^{-1}} \qquad 〔2〕$$

必要によって，i_2 を i_1 に代入して i_3 を求める方法を反復すればよい。

本式は単に Todhunter の公式を変形したものに過ぎず新しいものではないが，従来本式の i_1 は金利計算表から与えられる利率を用いているので，その精密度はこれに影響を受けるのが当然であった。本稿はこの i_1 として一般に与えられた金利計算表の数値よりも精密な〔1〕式の値を利用して結果の精密度を高めることを目的とする。これは関数電卓の利用によって，現実に可能となるのである。この点後述する〔3〕式の場合においても同様である。

3

利息関数式を $f(i)=0$ とし，これを $f(i_1+\rho)=0$ として Taylor の定理によって展開する。

$$f(i_1+\rho)=f(i_1)+\rho f'(i_1)+\frac{\rho^2}{2!}\cdot f''(i_1)+\frac{\rho^3}{3!}\cdot f''(i_1)+\cdots\cdots=0$$

ただし，$f'(i_1)$，$f''(i_1)$，…… は，第一次微分係数，第二次微分係数……を示す。

ρ^3 を含む項以下を省略して，

$$\rho=-\frac{f(i_1)}{f'(i_1)}$$

$$\therefore \quad i_2 = i_1 - \frac{f(i_1)}{f'(i_1)} \qquad [3]$$

本式が Newton 法と言われるもので，必要によって同様の方法を反復すればよい。

4

〔**算例 1**〕 期末払20期の年金現価率が13.7804であるとき，その利率を求めよ。

〔解〕 公式〔1〕による。

$$p = \frac{20}{13.7804} - 1 = 0.4513\ 3668\ 1$$

$$i_2 = \frac{2\times 0.4513\ 3668\ 1 \times (3 + 0.4513\ 3668\ 1)}{3\times 21 + 2\times 20 \times 0.4513\ 3668\ 1}$$

$$= 0.0384\ 3672\ 3$$

以下この値を小数第5位未満4捨5入したものを $i_1 = 0.0384\ 4$[4] として利用する。

公式〔2〕による。

$$a_1^{-1} = \frac{0.0384\ 4}{1-(1+0.0384\ 4)^{-20}} = 0.0725\ 6891\ 2$$

$$v_1^{n+1} = (1+0.0384\ 4)^{-21} = 0.4528\ 8759\ 2$$

$$i_2 = 0.0384\ 4 + 0.0384\ 4 \times \frac{\dfrac{\dfrac{1}{13.7804}}{0.0725\ 6891\ 2} - 1}{1 - 20\times 0.4528\ 8759\ 2 \times 0.0725\ 6891\ 2}$$

$$= 0.0384\ 3678\ 8$$

〔注〕 同様の方法を $i_2 = 0.0384\ 368$ として反復すると。

$i_3 = 0.0384\ 3678\ 8$ となり一致する。

公式〔3〕による。

$$f(i_1) = 1 - (1+0.0384\ 4)^{-20} - 13.7804 \times 0.0384\ 4$$

$$= -0.0000\ 1516\ 7$$

$$f'(i_1) = 20 \times (1+0.0384\ 4)^{-21} - 13.7804$$

$$= -4.7226\ 4815\ 4$$

$$i_2 = 0.0384\ 4 - \frac{-0.0000\ 1516\ 7}{-4.7226\ 4815\ 4}$$

=0.0384 3678 8

〔注〕 同様の方法を $i_2=0.0384\ 368$ として反復すると，

$i_3=0.0384\ 3678\ 8$ となり一致する。

念のため逆算して検算を行ってみる。

i	a
0.0384 3678 7	13.7804 0014
0.0384 3678 8	13.7804 0002
0.0384 3678 9	13.7803 9988

明らかに，本例において近似値

0.0384 3678 8

は正しく小数第9位未満4捨5入したものであることを確認できる。

電卓として10桁関数電卓の1例として「シャープ EL 5000」による公式〔1〕,〔2〕,〔3〕の操作を末尾に示す。

なお，10桁利息関数電卓の1例として「HP 38 E」（横河発売）によれば，一発で利回りを得られる。この操作も参考に末尾に示す。

（いずれの所要時間も少し多い目を参考に併記しておいた。）

5

〔1〕,〔2〕両式は，年金現価，償還賦金の利回り公式である。次に，これを年金終価，積立賦金の利回り公式に転換しよう[5)]。

年金現価率

$$a=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

において，　$-n$ を n，a を $-S$　とおくと，

$$-S=\frac{1-(1+i)^{n}}{i}$$

S は $S_{\overline{n|}}$ の略記，年金終価率

$$S=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

と，年金終価率に転換するから，これを用いて，〔1〕，〔2〕両式を年金終価，積立賦金の利回り公式に転換する。

〔1〕式

$$p=\frac{-n}{-S}-1=\frac{n}{S}-1$$

pは明らかに負数となるから，正数とするため

$$-p=1-\frac{n}{S}=p'$$

とし，

$$i_2=\frac{-2p'(3-p')}{3(-n+1)-2(-n)(-p')}=\frac{-2p'(3-p')}{-\{3(n-1)-2np'\}}$$

$$=\frac{2p'(3-p')}{3(n-1)-2np'}\qquad \text{ただし，} p'=1-\frac{n}{S} \qquad 〔4〕$$

〔2〕式

$$i_2=i_1+i_1\cdot\frac{\dfrac{(-S)^{-1}}{(-S_1)^{-1}}-1}{1-(-n)v_1^{-n+1}(-S_1)^{-1}}$$

$$=i_1+i_1\cdot\frac{\dfrac{S^{-1}}{S_1^{-1}}-1}{1-n(1+i_1)^{n-1}S_1^{-1}} \qquad 〔5〕$$

S^{-1} は，積立賦金率

必要によって，同様の方法を反復すればよい。

〔3〕式については，式そのものには変化なく，ただ i_1 として〔4〕式を利用すればよい。

〔算例 2〕 年金年額 ¥50,000 で期間18か年の期末払年金終価が ¥1,492,160 であるとき，その利率を求めよ。

〔解〕 公式〔4〕による。

$$S=\frac{¥1,492,160}{¥50,000}=29.8432$$

$$p'=1-\frac{18}{29.8432}=0.3968\ 4752\ 3$$

$$i_2=\frac{2\times0.3968\ 4752\ 3\times(3-0.3968\ 4752\ 3)}{3\times(18-1)-2\times18\times0.3968\ 4752\ 3}$$
$$=0.0562\ 7656\ 9$$

以下，この値を小数第4未満4捨5入したものを　$i_1=0.0563$　として利用する。

公式〔5〕による。

$$S_1^{-1}=0.0335\ 0744\ 4$$
$$(1+i_1)^{n-1}=2.5373\ 6973\ 8$$

$$i_2=0.0563+0.0563\times\frac{\dfrac{\frac{1}{29.8432}}{0.0335\ 0744\ 4}-1}{1-18\times2.5373\ 6973\ 8\times0.0335\ 0744\ 4}$$
$$=0.0562\ 9674\ 7$$

〔注〕　同様の方法を　$i_2=0.0562\ 97$　として反復すると，
$i_3=0.0562\ 9674\ 7$　となり一致する。

公式〔3〕による。

$$f(i_1)=(1+0.0563)^{18}-1-29.8432\times0.0563$$
$$=0.0000\ 5149\ 5$$
$$f'(i_1)=18\times(1+0.0563)^{17}-29.8432$$
$$=15.8294\ 5528$$
$$i_2=0.0563-\frac{0.0000\ 5149\ 5}{15.8294\ 5528}$$
$$=0.0562\ 9674\ 7$$

〔注〕　同様の方法を　$i_2=0.0562\ 97$　として反復すると，
$i_3=0.0562\ 9674\ 7$　となり一致する。

念のため逆算して検算を行ってみる。

i	a
0.0562 9674 6	29.8431 9978
0.0562 9674 7	29.8432 0003

明らかに本例において近似値

$$\underline{\underline{0.0562\ 9674\ 7}}$$

は正しく小数第9位未満4捨5入したものであることを確認できる。

6

(1) 利付債券

額面金額（償還金額）C，債券利率g，償還期限n，評価利率iの債券価格Aは，周知のように，

$$A=C-C(i-g)a_{\overline{n}|}$$

ただし，i，g，n はすべて１期単位

$$\frac{C-A}{C}=(i-g)a_{\overline{n}|}$$

ここで，$\frac{C-A}{C}=k$，$a_{\overline{n}|}$ を a と略記すると，

$$k=(i-g)a$$

$$i=ka^{-1}+g$$

$$=k\cdot\frac{1}{n}\left\{1+\frac{n+1}{2}\cdot i+\frac{n^2-1}{12}\cdot i^2-\cdots\cdots\right\}+g$$

｛ ｝内の i^2 を含む項以下を省略して i_1 を求める。

$$i_1=\frac{k}{n}\left\{1+\frac{n+1}{2}\cdot i_1\right\}+g$$

$$\therefore\quad i_1=\frac{g+\frac{k}{n}}{1-\frac{n+1}{2n}\cdot k}$$ 6)

これを原式の i^2 項を含む項まで採って，i^2 の１つに代入して i_2 を求める。

$$i_2=\frac{k}{n}\left\{1+\frac{n+1}{2}\cdot i_2+\frac{n^2-1}{12}\cdot i_1\cdot i_2\right\}+g$$

$$\therefore\quad i_2=\frac{g+\frac{k}{n}}{1-\frac{(n+1)k}{2n}\left(1+\frac{n-1}{6}\cdot i_1\right)}\qquad〔6〕$$ 7)

次に，〔6〕式の値を i_1 として原式に代入して i_2 を求める。

$$k=(i_1-g)a_1$$

$$\therefore\quad i_2=ka_1^{-1}+g \qquad 〔7〕^{8)}$$

必要によって，同様の方法を反復することができる。

また，〔6〕式を i_1 として〔3〕式を利用することができる。

(2) 割引債券

前述(1)利付債券において，$g=0$ とすれば，割引債券の利回り公式を得ることができる[9]。

原式　$k=(i-g)a$ において，$g=0$ とすると，

$$k=ai=1-(1+i)^{-n}$$

$$\therefore\quad (1+i)^{-n}=1-k=1-\frac{C-A}{C}=\frac{A}{C}$$

$$(1+i)^n=\frac{C}{A}$$

両辺の対数（常用対数，自然対数いずれも可）を採り，i を求める。

$$n\log(1+i)=\log\left(\frac{C}{A}\right)$$

$$\therefore\quad i=\log^{-1}\left\{\frac{1}{n}\log\left(\frac{C}{A}\right)\right\}-1 \qquad 〔8〕$$

また，

$$i=\left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{n}}-1$$

本例は，複利終価または複利現価の利回りを求めることに相当することは明らかである。

〔算例 3〕 額面金額（償還金額）¥100 で 7.5% 利付 2 期払，償還期限 10 年の国債価格が ¥98 のとき，その利回りを求めよ。

〔解〕 公式〔6〕による。

$$g=0.075\div2=0.375$$

$$n=10\times2=20$$

$$k=\frac{¥100-¥98}{¥100}=0.02$$

$$i_1=\frac{0.0375+\dfrac{0.02}{20}}{1-\dfrac{20+1}{2\times20}\times0.02}=0.0389\ 0854\ 0$$

$$i_2=\frac{0.0375+\dfrac{0.02}{20}}{1-\dfrac{20+1}{2\times20}\times0.02\times\left(1+\dfrac{20-1}{6}\times0.0389\ 0854\ 0\right)}$$

$$=0.0389\ 5947\ 7$$

公式〔7〕による。　　$i_1=0.0389\ 6$

$$i_2=0.02\times\frac{0.0389\ 6}{1-(1+0.0389\ 6)^{-20}}+0.0375$$

$$=0.0389\ 5811\ 4$$

〔注〕 同様の方法を $i_2=0.0389\ 581$ として反復すると
$i_3=0.0389\ 5809\ 0$ となる。

公式〔3〕による。

$$f(i_1)=0.02-(0.0389\ 6-0.0375)\times\frac{1-(1+0.0389\ 6)^{-20}}{0.0389\ 6}$$

$$=0.02-0.0014\ 6\times13.7163\ 4409$$

$$=0.0000\ 2586\ 2$$

$$f'(i_1)=-13.7163\ 4409+\{20\times(1+0.0389\ 6)^{-21}-13.7163\ 4409\}$$

$$\times\left(1-\frac{0.0375}{0.0389\ 6}\right)$$

$$=-13.8944\ 7154$$

$$i_2=0.0389\ 6-\frac{-0.0000\ 2586\ 2}{-13.8144\ 7154}=0.0389\ 5813\ 9$$

〔注〕 同様の方法を $i_2=0.0389\ 581$ として反復すると
$i_3=0.0389\ 5809\ 0$ となる。

念のため逆算して検算を行ってみる。

i	A
0.0389 5808 9	98.0000 0096
0.0389 5809 0	97.9999 9961

明らかに本例において，近似値

0.0389 5809 0 （1期）

が正しく小数第9位未満4捨5入したものであることを確認できる。

$$\therefore \quad \underline{j_{(2)}=0.0779\ 1618}$$ [10)]

電卓利用は，末尾参照。

〔**算例 4**〕 5年満期の割引国債の課税後の払込金は，額面￥100につき￥74.59であるとき，その利回りを求めよ。

〔解〕 公式〔8〕による。

$$n=5\times 2=10$$

$$i=\log^{-1}\left\{\frac{1}{10}\log\left(\frac{¥100}{¥74.59}\right)\right\}-1$$

$$=0.0297\ 5032\ 8 \quad (1\,期)$$

念のため逆算して検算を行ってみる。

i	v^{01}
0.0297 5032 7	0.7459 0001 4
0.0297 5032 8	0.7459 0000 6

明らかに本例において近似値

$$\underline{0.0297\ 5032\ 8 \quad (1\,期)}$$

が正しく小数第9位未満4捨5入であることを確認できる。

$$\underline{j_{(2)}=0.0595\ 007}$$ [11)]

電卓利用は，末尾参照。

〔参考〕 わが国実勢の現状を付記しておく。

1) 利付債券 $$\frac{年利息+\dfrac{償還金額-買入価格}{残存期間}}{買入価格}$$

〔算例3〕の数値をを入れると，次のようになる。

$$\frac{¥7.50+\dfrac{¥100-¥98.00}{10}}{¥98.00}=0.0785\ 7$$ [12)]

これは単利利回りによるもので，複利利回りでないことを注意しなければならない。

2） 割引債券

〔算例４〕において，５年を年単位に採る。

$$i=\log^{-1}\left\{\frac{1}{5}\log\left(\frac{¥100}{¥74.59}\right)\right\}-1=0.0603\ 8 \quad （切捨）$$ [13)]

さきに示した $j_{(2)}$ を年真利率で示したものであって，理論的に差異はない。

〔算例 1〕

〔公式 1〕

シャープ EL 5000

C
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$
20
÷
13.7804
−
1
=
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$
+
3
×
RM
×
2
÷
((
(2×20)
×
RM
+
3(20+1)
))
=
小数第 9 位未満 4 捨 5 入

0.0384 3672 3

(注) 所要時間… 1 分間弱
(2×20)…暗算

〔公式 2〕

シャープ EL 5000

C
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$
$(1+i_1)$
y^{x}
20
+−
=
+−
+
1
÷
i_1
=
F 1/x
$\overrightarrow{\mathrm{xM}}$
1
÷
13.7804
÷
RM
−
1
÷
↗

((
$(1+i_1)$
y^{x}
21
+−
=
×
20
×
RM
=
+−
+
1
))
×
i_1
+
i_1
=
小数第 9 位未満 4 捨 5 入

0.0384 3678 8

(注) 所要時間…1.5分間

〔公式 3〕

シャープ EL 5000

C
x→M
i_1
x→M
+
1
=
y^x
20
+/−
=
+/−
+
1
−
((
13.7804
×
RM
))
÷
((
1
+
RM
=
↗
y^x
21
+/−
=
×
20
−
13.7804
))
+/−
+
RM
=

小数第9位未満4捨5入

0.0384 3678 8

(注) 所要時間…1分間強

利息関数電卓 (HP 38 E)

END
f FIN
20
n
1
CHS
PMT
13.7804
PV
i
<
f 7

3.84 3678 8%

(注) 所要時間…0.5分間強
<…暫らく待つ

〔算例 3〕

〔公式 6〕

シャープ EL 5000

C
$x\overrightarrow{M}$
. 02
÷
20
+
. 0375
÷
((
(20+1)
×
. 02
÷
(2×20)
=
+⇄−
+
1
))
=
$x\overrightarrow{M}$
. 02
÷
20
+
. 0375
↗

÷
((
(20−1)
×
RM
÷
6
+
1
×
(20+1)
×
. 02
÷
(2×20)
=
+⇄−
+
1
))
=

小数第 9 位未満 4 捨 5 入

0.0389 5947 7

（注） 所要時間…1. 5分間

〔公式 7〕

シャープ EL 5000

1
+
i_1
=
y^x
20
+⇄−
=
+⇄−
+
1
÷
i_1
F ↕
×
. 02
+
. 0375
=

小数第 9 位未満 4 捨 5 入

0.0389 5811 4

（注） 所要時間… 1 分間弱

〔公式 3〕

シャープ EL 5000

利息関数電卓(HP 38 E)

C			END
x→M	+	i_1	f FIN
1	.02	=	20
+	÷	+/−	n
i_1	((	+	98
=	1	1	CHS
y^x	+	))	PV
20	i_1	−	3.75
+/−	=	RM	PMT
=	y^x	))	100
+/−	21	=	FV
+	+/−	+/−	i
1	=	+	<
÷	×	i_1	2
i_1	20	=	×
=	−	小数第9位未満4捨5入	f 6
x→M	RM		
×	×	**0.0389 5813 9**	**7.79 1618%** (=$j_{(2)}$)
(0.0389 6−0.0375)	((		
=	.0375	(注) 所要時間…1.5分間強	(注) 所要時間…1分間弱
+/−	÷		
↗	↗		

〔算例 4〕

〔公式 8〕シャープ EL 5000		利息関数電卓(HP 38 E)
100	100	END
÷	÷	f FIN
74.59	74.59	10
=	=	n
log	y^x	74.59
÷	.1	CHS
10	=	PV
=	−	100
F 10^x	1	FV
−	=	i
1	小数第9位未満4捨5入	<
=		2
小数第9位未満4捨5入	**0.0297 5032 8**	×
		f 5
0.0297 5032 8		
		5.95 007% (=$j_{(2)}$)
(注) 所要時間…0.5分間		(注) 所要時間…0.5分間

注1) 本誌 第18巻第2号 1982年12月

2) Cf. H. Karpin : "Simple algebraic Formulae for Estimating the Rate of Interest" Journal of the Institute of Actuaries Vol. 93 1967.

3) Cf. R. Todhunter : Text book on Compound Interest and Annuities-certain 4 th ed. 1937 p. 178.

4) 前稿を改良している。

5) 前稿を拡張している。

6) Cf. R. Todhunter : "On an Approximation to the Rate of Interest yield by a Bond at Premium" Journal of the Institute of Actuaries Vol. 33 1897 p. 358.

7) 注6の改良式である。

8) 注3 p. 188 参照。

9) 前稿を拡張している。

10) 年利回り $j_{(2)}$ を用いる慣行に従う。

11) 利付債券と比較するため $j_{(2)}$ を用いた。
(ただし，割引債券は税引であることに注意されたい。)

12) 公社債引受協会：公社債利回表〝単利利回表〞1977 増補改訂版。

13) 実務では，注12〝複利現価表〞から一次補間法で求める。

(1983. 5. 5 稿)